# دراسة تحليلية للاستقرار والتفرع للمعادلات التفاضلية الدالية من الدرجة الثانية


**إعداد**

**شذا عبد العزيز ابراهيم السباعي**


**بحث مقدم لنيل درجة الماجستير في العلوم**

**(الرياضيات / المعادلات التفاضلية)**


**إشراف**

**د. سارة عبد الرحمن آل الشيخ**



**كلية العلوم**

**جامعة الملك عبد العزيز**

**جدة – المملكة العربية السعودية**

**رمضان ١٤٣٩ – مايو ٢٠١٨**

# المستخلص

تُستخدم المعادلات التفاضلية الدالية من الدرجة الثانية على نطاق واسع في مجالي الهندسة الميكانيكية وهندسة التحكم ولكن على الرغم من تلك التطبيقات الهامة لمثل هذه المعادلات إلا أن الأبحاث التي تهدف إلى تطوير الجزء النظري في التحليل النوعي لها تعتبر قليلة مقارنةً بتلك التي تهتم بالمعادلات التفاضلية الدالية من الدرجة الأولى. في هذه الرسالة قمنا بتناول صنفين من المعادلات التفاضلية الدالية من الدرجة الثانية، إحداهما يعتمد على الزمن بشكل ضمني فقط بحيث أن عامل التأخير وجميع مُعاملات الحدود في المعادلة هي عبارة عن ثوابت بينما المعادلة الأخرى تعتمد على الزمن بشكل صريح يكون فيها عامل التأخير وجميع مُعاملات المعادلة عبارة عن دوال في الزمن. وقد قمنا بدراسة الاستقرار للحل الصفري في كلا المعادلتين بينما قمنا بدراسة تفرع هوبف المحلي للمعادلة الأولى فقط. تمكنا في هذه الدراسة من استنتاج شروط كافية تضمن الاستقرار وذلك باستخدام إحدى نظريات النقطة الثابتة عِوضًا عن الطريقة الأكثر شيوعًا في هذا المجال وهي طريقة ليبنوف المباشرة. علمًا بأن النتائج التي توصلنا لها تطور ما سبق من أبحاث في هذا المجال. إضافةً إلى ذلك فقد أثبتنا وجود سلاسل من تفرعات هوبف المحلية في المعادلة الأولى تحت شروط معينة مما يعني وجود حلول دورية للمعادلة تحت تلك الشروط وذلك بتطبيق نظرية هوبف. وقد قمنا بدعم بعضًا من نتائجنا النظرية في كلا الاتجاهين بأمثلة مصحوبة بمحاكاة عددية باستخدام برنامج الماتلاب والتي أشارت إلى أن توقعاتنا الناشئة عن التحليل النوعي للمعادلات تتفق بشكل كبير مع الحلول المولدة عدديًا.

# Stability and Bifurcation Analysis for Second Order Functional Differential Equations

By

Shaza Abdulaziz Alsibaai

A thesis submitted for the requirements of the degree of Master of Science in Mathematics

Supervised by

Dr. Sarah A. Al-Sheikh

FACULTY OF SCIENCE

KING ABDULAZIZ UNIVERSITY

JEDDAH, SAUDI ARABIA

Ramadan 1439 H - May 2018

# Abstract

Second-order Functional Differential Equations (FDEs) have been used widely in the significant field of mechanical and control engineering. However, a little work has been done in the qualitative theory of such equations compared with those conducting first-order FDEs. In our study, we focus on two classes of second-order functional differential equations. The first one is autonomous in which the delay argument and the coefficients of the equation are constants whereas the second one is non-autonomous in which the delay argument and the equation's coefficients are time-dependent functions. The stability of the zero solution of both equations is examined while the existence of local Hopf bifurcations is discussed only for the autonomous equation. Sufficient conditions for the global asymptotic stability are established using fixed point theory instead of the more common used way which is Lyapunov's direct method. Moreover, the existence of sequences of local Hopf bifurcations leading to non-constant periodic solutions are proved for the autonomous equation under certain conditions by applying Hopf bifurcation theorem. In the bifurcation analysis, the delay argument and the coefficients of the terms that include the delay are considered as bifurcation parameters in separate cases. Some of our theoretical results in both directions are supported through specific examples and numerical simulations using MATLAB software which indicate that the qualitative predictions and the numerical generated solutions are in good agreement.