مبدأ إيكلاند للتغاير و نظرية النقطة الثابتة في الفراغات شبه المترية

إعداد

هديل زكي محمد الزمعي

إشراف

أ.د. نصير شهزاد محمد أيوب

د. مريم علي عبدالرحمن الغامدي

المستخلص

تهدف هذه الرسالة إلى دراسة مبدأ إيكلاند للتغاير و نظرية النقطة الثابتة في الفراغات شبه المترية. و لقد اعتمدت هذه الدراسة على استخدام نوعين من الشروط، الأول هو شرط خامسي، و الذي يُعرّف دالة موجبة، متصلة و غير تناقصية η. أما الشرط الثاني فهو شرط زانج-جيانج، و الذي يضم ثلاث أنواع من الدوال γ ، η و F بحيث تكون $\gamma \in \Gamma$ ، وΓ هو فصل كل الدوال الموجبة، شبه الجمعية، التزايدية ، المتصلة والتي تحقق الشرط $\gamma^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. وتكون $\eta \in \mathcal{A}$ ، حيث $\mathcal{A}$ هو فصل كل الدوال الموجبة بحيث أنه إذا وجد $\epsilon > 0$ و $\gamma \in \Gamma$ شريطة أن $\eta(t) \leq \epsilon$ فإن $\gamma(t) \leq \eta(t)$. أما $F \in \mathcal{F}$، و$\mathcal{F}$ هو فصل كل الدوال الحقيقية، جمعية علوية، تزايدية، شبه متصلة علوية على فصل الأعداد الحقيقية الموجبة والتي تحقق الشروط $F(0) = 0$ و $F^{-1}([0, \infty)) \subset [0, \infty)$.

في ظل هذه الفروض، درسنا وجود العنصر الأصغر و العنصر الأكبر في الفراغ شبه المتري. كما تم استخدام نوعين من دوال المسافة المعممة وهي دالة المسافة-w (w-distance) ودالة المسافة-mw (mw-distance) ومنها تم الحصول على نوع آخر من نظريات الوجود للعنصر الأصغر في الفراغ شبه المتري.

و بتطبيق هذه النظريات حصلنا على نتائج في اتجاهين. الإتجاه الأول يتضمن إثبات نظريات النقطة الثابتة لرواسم أحادية القيم من نوع كريستي، و رواسم متعددة القيم من نوع كريستي-كيرك، بالإضافة إلى بعض النتائج الأخرى المتعلقة بنظريات النقطة الثابتة في الفراغ شبه المتري.

الإتجاه الثاني تضمن إثبات صور مختلفة لمبدأ ايكلاند للتغاير و ذلك بالإعتماد على نوعي الشروط و دالتي المسافة السابق ذكرها. كما تم أيضا الحصول على بعض التطبيقات الهامة لمبدأ ايكلاند للتغاير و التي اشتملت على التكافؤ لهذا المبدأ مع كل من مفهوم الإكمال للفراغ شبه المتري و نظرية كريستي للنقطة الثابتة. و أخيرا تم استخدام هذا المبدأ في إثبات نظرية كلارك للنقطة الثابتة.

Ekeland's Variational Principle and Fixed Point Theory in Quasi-metric Space

By

Hadeel Zaki Mohammed Alzumi

Supervised By

Prof. Dr. Naseer Shahzad Muhammad Ayub

Dr. Maryam Ali Abdulrahman Alghamdi

Abstract

Some fundamental notions and results related to the concept of quasi-metric space is recalled. A discussion on the forms of EVP is included. A brief description of applications of EVP to fixed point theory is presented in the setting of metric spaces.

The existence of minimal and maximal elements is established in quasi-metric spaces under Khamsi's as well as Zhang-Jiang's conditions. As applications of our minimization theorems, some fixed point results of Caristi's type are derived. A positive answer to Kirk-Shahzad question is given in the general setting. A common fixed point theorem and a common coincidence point theorem for family of mappings are also obtained.

The existence of a minimal element using the concepts of generalized distances such as w-distance and mw-distance is shown. As applications, some Caristi's type fixed point results involving generalized distances are given.

Several variants of EVP under Khamsi's condition, Zhang-Jiang's conditions and conditions involving w- and mw-distances are obtained. The equivalence of EVP with the

completeness of the quasi-metric space is investigated. A generalized Clarke's fixed point theorem is also proved.